Trpasličí astrokvíz

Na začátek nejdříve vzorové řešení úloh z Bílého trpaslíka č. 132, poskytnuté přímo autorem. Za řešení zaslaná zájemci o tento kvíz mnohokrát děkujeme, budou vyhodnocena všechna současně na konci soutěže, která se již nezadržitelně blíží. Toto kolo je posledním, máte posledních šanci, jak zasáhnout do výsledků. Za odpověďmi a dalšími otázkami je opět Pavol Habuda. Odpovědi (včetně zdůvodnění) zasílejte poštou (Marek Kolasa, J. Vrchlického 3, 736 01 Havířov-Podlesí) nebo emailem (apo@astronomie.cz) do redakce do 15. 1. 2007.

(1) Ak je excentricita planétky $e = 0$, tak obieha okolo Slnka po kruhovej dráhe. Ak sa nachádza 90 stupňov od Slnka, je v kvadratúre, aspekte ktorý môže mať iba teleso obiehajúce z vonkajšej strany zemskej dráhy. Problém je, že zemská dráha má samotná nenulovú excentricitu: $e_Z = 0{,}017$. Planétka sa teda nachádza od Slnka ďalej ako $a_Z(1-e_Z)$, kde a_Z je veľká poloos zemskej dráhy. Podľa Keplerovho zákona

$$\frac{a^3}{T^2} = 1 \Longrightarrow T = a^{3/2} = (a_Z(1-e_Z))^{3/2} > (1-e_Z)^{3/2}$$

ak veľkú poloos vyjadríme v AU a obežnú dobu v rokoch.
Po dosadení $T > 0{,}974$, čo dáva obežnú dobu väčšiu ako 356 dní.

(2) Oskulačná dráha je taká dráha, ktorá sa dá popísať pomocou dráhových elementov a najlepšie aproximuje pohyb telesa v danom okamihu. Na kométu ale nepôsobí iba Slnko, ale ja zvyšné planéty. Tie budú vyvíjať najväčšiu silu, ak budú zoradené do jednej priamky so Slnkom. Potenciál, ktorý udeľuje Slnko kométe, je rovný

$$\phi_\odot = \frac{GM_\odot}{3R_\odot} = G\frac{336000M_Z}{3\frac{1AU}{215}} = \frac{GM_Z}{1AU}\cdot 24 \text{ mil.}$$

Potenciál, ktorým prispievajú planéty, bude

$$\phi_{\text{pl.}} = \phi_{\text{Mer.}} + \phi_{\text{Ven.}} + \phi_{\text{Zem}} + \phi_{\text{Mars}} + \phi_{\text{Jup.}} + \phi_{\text{Sat.}} + \phi_{\text{Ur.}} + \phi_{\text{Nep.}}$$

$$\phi_{\text{pl.}} = \frac{GM_Z}{1AU}\cdot\left(\frac{0,06}{0,39}+\frac{0,82}{0,72}+\frac{1}{1}+\frac{0,11}{1,52}+\frac{317,8}{5.2}+\frac{95,2}{9,54}+\frac{14,6}{19,22}+\frac{17,2}{30,06}\right)$$

$$\phi_{\text{pl.}} = \frac{GM_Z}{1AU}\cdot(0,15+1,14+1+0,07+61,12+9,98+0,76+0,57) = \frac{GM_Z}{1AU}\cdot 74,9$$

Predpokladali sme, že planéty majú kruhové dráhy. Ak zarátame excentricity a predpokladáme, že planéty sú vždy v perihéliu, tak sa koeficient 74,9 zmení na 78,6. Potenciál, ktorým prispievajú planéty je teda približne 300tisíckrát menšia ako slnečná. Všimnite si, že najviac k potenciálu prispievajú Jupiter a Saturn.
Energia kométy v perihéliu teda môže byť

$$E_{\text{kom.}} = E_{\text{kin.}} - \phi_\odot\,(\pm\phi_{\text{pl.}})$$

ak zarátame aj potenciál od planét.
Pre veľkú poloos sa dá odvodiť vzťah (pozrite si nejakú lepšiu učebnicu nebeskej mechaniky, odvodzovať to tu nebudem)

$$a = -\frac{GM_\odot m_{\text{kom.}}}{2E_{\text{kom.}}}$$

dosadením dostaneme

$$a = -\frac{GM_\odot m_{\text{kom.}}}{2\cdot(-\phi_{\text{pl.}} m_{\text{kom.}})} = \frac{GM_\odot}{2\frac{GM_Z}{1\text{ AU}}\cdot 78{,}6} = \frac{G\cdot 330\,000M_Z}{2GM_Z\cdot 78,6}\cdot 1\text{ AU} = 2\,100\text{ AU}$$

čo je zhruba 100 000 rokov. V prípade extremne priaznivej geometrie sa vráti k Slnku za zhruba 100 000 rokov. Uvedený príklad nie je iba hra s teoretickými vzorčekmi. Tento efekt je reálny. Napríklad Kohoutkova kométa má (aspoň v starších katalogoch mala) parabolickú dráhu a odhadovaný čas návratu k Slnku niekoľko miliónov rokov.

(3) Ak predpokladáme, že albedo oboch plechoviek je rovnaké v celom spektre vlnových dĺžok, tak dosiahnú obe rovnakej teploty. Ich teplota bude rovnaká ako je teplota zdroja, ktorým ich osvetľujeme, pretože sa dostanú do stavu tepelnej rovnováhy so zdrojom. Pravda, čierna dosiahne tejto teploty oveľa skôr.

(4) Maximálna rýchlosť musí byť menšia ako je prvá kozmická, aby sa Lunar Rover vôbec udržal na povrchu. To je

(5) *Uvedené riešenie bolo publikované v roku 2005 vo fyzikálnom korešpondenčnom seminári UK MFF.* Každá spektrálna čiara má nenulovú šírku. Táto nenulová šírka je spôsobená spolupôsobením viacerých faktorov. Najdôležitejšie sú:
• Prirodzená šírka čiary
• Inštrumentálny profil
• Teplotné rozšírenie
• Rozšírenie turbulenciou
• Rozšírenie zrážkami
• Rozšírenie elektrickým (Starkov jav) a magnetickým (Zeemanov jav) poľom
• Rozšírenie rotáciou
Viacej o týchto rozšíreniach napr. na http://fykos.mff.cuni.cz/cz/rocnik19/reseni/ /reseni2-3.pdf
U oboch typov, ako O tak M je čiara H-alfa pomerne nevýrazná čiara. Ako sa typ O blíži typu B, H-alfa sa stáva výraznejšou. Meranie šírku čiary bude u nej jednoduchšie. Šírku čiary budú ovplyvňovať najviac dve veci – teplotné rozšírenie a rozšírenie rotáciou. Horúci nadobri rotujú na hranici stability, s rotačnou rýchlosťou stoviek km/s. Achernar, ak si to dobre pamätám, rotuje obvodovou rýchlosťou zhruba 300 km/s.
Uvážme, že rozšírenie čiary je spôsobené tepelným pohybom. Použime ekvipartičný teorém, ale vezmime v úvahu iba jeden stupeň voľnosti (od v_x iba, v_y a v_z nám k tepelnému pohybu neprispievajú):

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{H}}v^2 = \frac{1}{2}kT\,.$$

Toto odvodenie rozšírenia spektrálnej čiary je fyzikálne zložitejšie. Ak mu nerozumiete, neklesajte na mysli. Pri odvodzovaní jednoducho použite rovnicu rovnosti kinetickej a tepelnej energie $1/2\, mv^2 = 3/2\, kT$. Dostanete (až na nepodstatné konštanty) rovnaké výsledky.
Použime rovnicu Dopplerovho posunu:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}\,,$$

môžeme teda písať, že

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c}\cdot\sqrt{\frac{kT}{m_{\mathrm{H}}}}$$

Porovnaním dvoch rovníc, jednej pre hviezdu sp. triedy O a druhej pre M dostaneme

$$\frac{\Delta\lambda_{\mathrm{O}}}{\Delta\lambda_{\mathrm{M}}} = \sqrt{\frac{T_{\mathrm{O}}}{T_{\mathrm{M}}}} = \sqrt{\frac{40\,000}{2\,500}} = 4\,.$$

Atómy vodíku sa v atmosfére hviezdy O pohybujú rýchlosťami $v = (3\, kT/m_{\mathrm{H}})^{1/2} \sim$ $\sim$ 15 km/s. Ak uvážime aj spomenutú rýchlu rotáciu, tak pomer rozšírenia pre oba spektrálne typy nebude 4, ale desaťkrát väčší.